

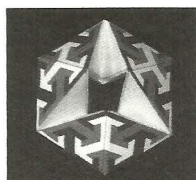
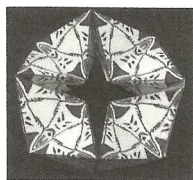
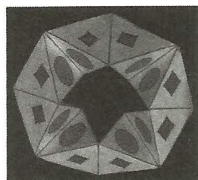
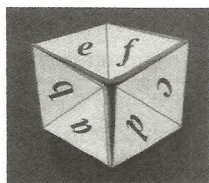
SEGUNDA PARTE

CALEIDOSCICLOS

CLAUDEMIR MURARI

A segunda parte será dedicada aos caleidosciclos, instrumentos educacionais constituídos de, no mínimo, seis tetraedros que, apesar de se assemelharem-se a brinquedos, ensejam várias possibilidades, de estudo de conceitos geométricos importantes.

Os caleidosciclos, assim como os caleidoscópios, constituem um interessante recurso pedagógico. Ambos têm uma relação mútua em sua essencialidade.



Cap. 1: *A origem dos caleidosciclos e alguns argumentos para utilizá-los;*

Cap. 2: *A construção dos caleidosciclos;*

Cap. 3: *Quantos e quais são os caleidosciclos?*



CAPÍTULO 1

A ORIGEM DOS CALEIDOSCICLOS E ALGUNS ARGUMENTOS PARA UTILIZÁ-LOS

A – CALEIDOSCICLOS

O tema de estudo desse capítulo insere-se em um de nossos objetivos, que é tornar mais aprazível o ensino de geometria através de material que se pode manipular, em acordo com muitos educadores, como Reys (1971 *apud* NACARATO, 2004, p. 3), que sugere a utilização de “objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar”.

Ainda em consonância com Nacarato (2004, p. 4), o desenvolvimento da habilidade de representar um objeto abstrato, que está fora da realidade sensível do indivíduo, no momento de sua ação sobre esse objeto, “depende da exploração de modelos ou materiais que possibilitem a construção de imagens mentais”.

Em Pais (1996), temos que há quatro elementos fundamentais que intervêm neste processo: o objeto, o conceito, o desenho e a imagem mental.

O objeto, associado aos modelos ou materiais, permite a manipulação física de modelos geométricos, apesar de representar a forma mais elementar do conceito. Representarem-se conceitos geométricos por desenhos é um meio bastante utilizado. Porém, é importante lembrar que tanto os objetos quanto os desenhos são apenas representação dos conceitos geométricos. Apesar disso, o recurso gráfico é bastante utilizado para reproduzir noções elementares e mesmo complexas, como teoremas.

Além desse embasamento teórico, vale lembrar que, ao trabalhar com caleidosciclos, exercita-se construções gráficas relacionadas a desenho geométrico. A despeito de na atualidade muito se utilizar o computador para realizarem-se as construções, estimulamos o uso de lápis, papel, régua, compasso, esquadro e transferidor, que pela nossa experiência, contribuem para uma melhor percepção dos conceitos. No caso dos caleidosciclos, as construções gráficas podem ser realizadas tanto manualmente como através de *softwares*. Acrescente-se a aplicação de noções geométricas como simetria e rotação de poliedros, temas importantes cuja compreensão pode ser reforçada com o estudo de caleidosciclos.

A etimologia da palavra *caleidosciclos* remete-nos, pelo radical *calei*, coisas belas, como já vimos na tradução do grego para a palavra *caleidoscópio*. De fato, o mesmo se aplica ao *caleidosciclo*, que do grego temos: *kalos* (belo) *eidos* (forma) e *kyklos* (ciclo). Além disso, encontramos outra similaridade entre estes dois objetos: possibilitam a *repetição perfeita*. Nos caleidoscópios temos a repetição perfeita de imagens, e nos caleidosciclos encontramos a repetição perfeita de padrões.

Conceito: Um caleidosciclo é um conjunto de tetraedros unidos pelas suas extremidades formando um círculo (ou anel) tridimensional.

O tipo mais simples de caleidosciclo é um anel formado por seis tetraedros conectados por arestas ortogonais. As arestas articuladas são bases de triângulos isósceles. Ver FIG. 1.

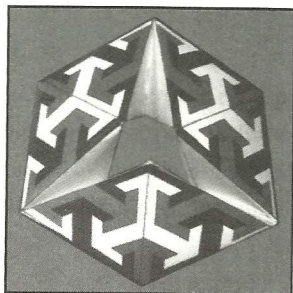


FIGURA 1

B – COMO SURGIRAM OS CALEIDOSCICLOS?

Em 1958, Wallace Walker (designer de Artes Gráficas), ainda estudante na Cranbrook Academy of Art (Michigan), trabalhando num projeto para formas estruturais de papel, idealizou o IsoAxis®, que consistia numa rede de 60 triângulos isósceles retângulos. Ele pode ser dobrado de diversas formas. Na FIG. 2, o resultado de suas dobras assemelha-se a uma flor.

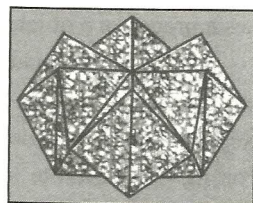


FIGURA 2

As dobraduras devem ser feitas segundo suas linhas para que se obtenham doze tetraedros irregulares, os quais, unidos pelas suas extremidades, formam o IsoAxis®. Realizando-se movimentos de rotação através do centro, temos mudanças das formações simétricas dos tetraedros conectados, que se repetem a cada ciclo de cinco rotações.

A planificação do IsoAxis® (FIG. 3) é bastante flexível, podendo suas linhas serem comprimidas ou distendidas, resultando em diferentes padrões, cujos triângulos formam anéis de tetraedros, com movimentos giratórios volvidos para o centro. Assim, aos objetos que facultam a repetição de ciclos através de rotações pelos centros de figuras simétricas dá-se o nome de caleidosciclos.

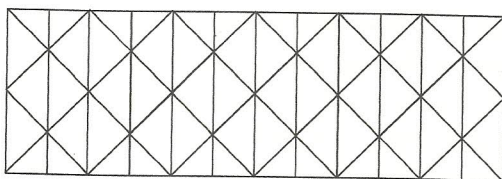


FIGURA 3

No presente trabalho não vamos considerar a rede contraída do IsoAxis®, pois gera caleidosciclos com rotações dificultadas pelo grande numero de pequenas faces. O nosso enfoque está dirigido para os caleidosciclos obtidos pelo estiramento da rede de triângulos do IsoAxis®, quando se tem triângulos equiláteros ou isósceles ou retângulos para formação dos tetraedros.

Considerando que os tetraedros são formados por dobraduras de quatro triângulos e conectados dois a dois por arestas ortogonais, temos que é preciso juntar seis tetraedros para se ter um anel ajustado. No entanto, o anel não é totalmente fechado, pois origina-se um diminuto buraco no centro do caleidosciclo, que pela sua pequena dimensão pode se reduzir a um ponto.

Ao traçarmos uma seção transversal do modelo da FIG.1, temos um hexágono regular, que seria o produto de seis triângulos equiláteros ao redor de um ponto para perfazer os 360° (FIG. 4). Isso justifica por que seis é o número mínimo de tetraedros que devem ser conectados para a formação do circulo tridimensional que dá origem ao caleidosciclo.

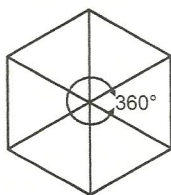


FIGURA 4



CONSTRUÇÃO DOS CALEIDOSCICLOS

A – CALEIDOSCICLOS FECHADOS

A.1. PARA $n = 6, 8, 10$

Para a posição em que vértices dos tetraedros coincidem na origem, temos que metade das arestas de medida a está sobre um plano π (horizontal) e a outra metade, de mesma medida, estará na posição vertical (perpendiculares a π). As arestas nas quais os tetraedros são ligados são ortogonais. Através de um corte transversal obtemos, conforme FIG. 5:

- para $n = 6$ e 8 , polígonos regulares convexos;
- para $n \geq 10$, polígonos regulares estrelados.

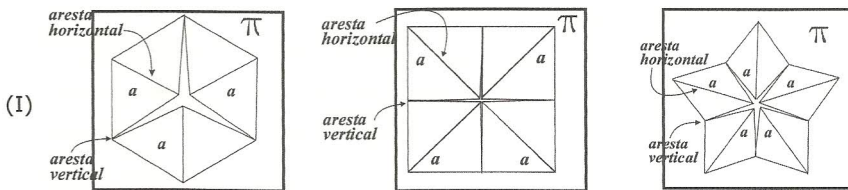


FIGURA 5

A.1.1. CÁLCULO DAS ALTURAS DOS TRIÂNGULOS DOS TETRAEDROS

Na FIG. 6 vemos a interseção do plano π com um tetraedro $ABCD$ onde x é a altura dos triângulos ACD e ABD é a aresta de $ABCD$. Para um maior entendimento, ver no capítulo 3 o tópico “A - Análise matemática”, onde se poderá comprovar que $\overline{BC}$ é ortogonal a $\overline{AD}$ e $\overline{AD} = \overline{BC} = a$.

O triângulo BFC é isósceles.

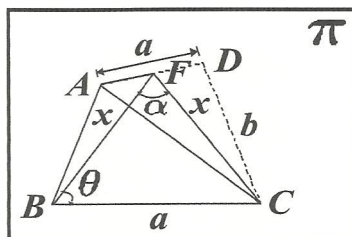


FIGURA 6

Como n é par, n é de forma $n = 2r$; onde $r = 3, 4, 5, \dots$

- (II) Então, $\theta = \frac{360^\circ}{2r} = \frac{180^\circ}{r}$ e $\hat{\alpha} = 180^\circ - 2\hat{\theta} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{r}$. Pela lei dos cossenos, no triângulo BFC temos: $a^2 = x^2 + x^2 - 2xx\cos\alpha$, o que dá $a = x\sqrt{2-2\cos\alpha} = x\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$.

A.1.2. CÁLCULO DAS ARESTAS DOS TRIÂNGULOS DOS TETRAEDROS

Na FIG. 6 o triângulo ACD possui: $\overline{FC} = x$ (altura) e $\overline{BC} = \overline{AD} = a$ (ortogonais), e $\overline{AF} = \overline{FD} = \frac{a}{2}$ (F é ponto médio de $\overline{AD}$).

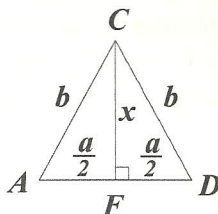


FIGURA 7

Então, por Pitágoras, temos:

$$(III) \quad b^2 = x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow b = \sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{2-2\cos\alpha}}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

A.2. CALEIDOSCICLO FECHADO DE SEIS TETRAEDROS

Para a construção dos caleidosciclos utiliza-se o seguinte material: régua, esquadro, tesoura, lápis, borracha, cola e papel resistente (como, por exemplo, a cartolina). Nas construções gráficas pode ser utilizado algum *software* de geometria.

Análise matemática: Se as arestas ortogonais (lugar em que dois tetraedros são unidos) dos tetraedros têm medida a , então $a = x\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$. De $n = 6 = 2r$ temos $r = 3$, por (II) $\theta = 60^\circ$, $\alpha = 60^\circ$ e $a = x$.

O triângulo isósceles terá dois lados iguais: $b = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = a\frac{\sqrt{5}}{2}$, ver FIG. 8.

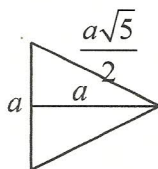


FIGURA 8

A.2.1. REDE DE TRIÂNGULOS

1. Desenhar em uma cartolina 32 triângulos isósceles (o número de faces triangulares do caleidosciclo é 4. $2r = 8r$; $r = 3$, com base de medida a e altura a . Sugestão: se $a \geq 4\text{cm}$, tanto a construção como os movimentos giratórios dos tetraedros ficam mais facilitados. Na FIG. 9 os triângulos foram rotulados de modo a tornar compreensível o processo de montagem.

Os triângulos coloridos não são faces dos tetraedros. Eles representam apenas superfícies de fixação, nas quais deverá ser passada cola e, depois de fixadas, ficarão na parte interior dos tetraedros.

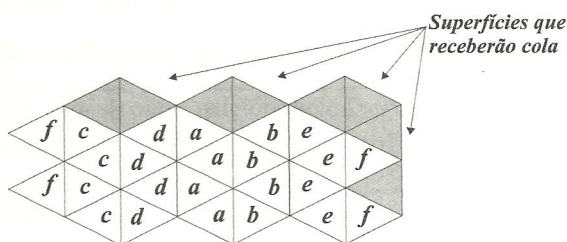


FIGURA 9

2. Recortar a rede de triângulos (tesoura).
3. Fazer vincos, seguindo as linhas verticais e inclinadas, dobrando para dentro e para fora.
4. Forme os tetraedros juntando os triângulos de faces comuns e contíguas, agrupando os de letras comuns. Observe que os triângulos f estão separados, localizando-se no início e no final da rede. Eles é que darão o fechamento no caleidosciclo. Os triângulos coloridos superiores serão colados nos triângulos inferiores c, d, a, b, e, f . Os dois últimos triângulos coloridos serão colados nos triângulos f, f , do início da rede, fechando o círculo tridimensional. Assim, por exemplo, o tetraedro designado por b , será formado pelos triângulos b, b, b, b , e um colorido, o qual não será visível.
5. Observe que teremos 6 tetraedros e $24(=8 \times 3)$ faces triangulares. A FIG. 10 mostra o caleidosciclo montado.

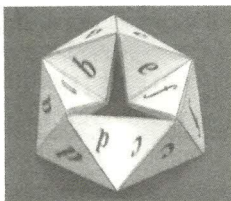


FIGURA 10

Sugestão de atividade:

Construir um caleidosciclo em que cada faixa horizontal de triângulos seja colorida com uma cor. Assim, na planificação da FIG. 9, as faixas *fedabe*, *cdabef*, *fedabe* e *cdabef* receberiam cores diferentes, de tal forma que, ao rotacionar o caleidosciclo, se vejam triângulos de mesma cor agrupados.

A.3. CALEIDOSCICLO FECHADO DE OITO TETRAEDROS

A.3.1. Análise matemática:

Sendo as arestas ortogonais de medida a , então, $a = x\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$. Como $n = 8 = 2r$, temos: $r = 4$. Por (II), $\theta = 45^\circ$, $\alpha = 90^\circ$ e $a = x\sqrt{2}$. De (III), temos:

$$b^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2 + a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow b = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Assim, os triângulos da planificação são da forma:

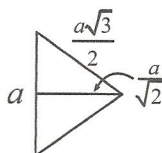


FIGURA 11

A.3.2. Rede de triângulos:

Construir 42 triângulos de medidas $\left(a, a\frac{\sqrt{3}}{2}, a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e altura $\frac{a}{\sqrt{2}}$, conforme a FIG. 12, e para a construção, seguir os procedimentos como no caso $n = 6$. A FIG. 13 mostra esse caleidosciclo montado.

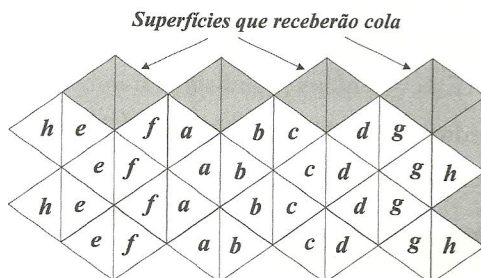


FIGURA 12

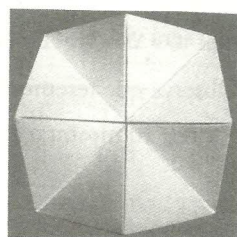


FIGURA 13

Sugestão de atividades:

- 1) Construir caleidosciclos fechados de $n = 10, 12$ tetraedros, determinando quantos e quais triângulos formarão as planificações.

- 2) Completar a tabela a seguir, onde $r = 3, 4, 5, 6$ e $n = 6, 8, 10, 12$, para caleidosciclos fechados.

r	3	4	5	6
n				
θ				
α				
x				
b				

B – CALEIDOSCICLO REGULAR ABERTO DE OITO TETRAEDROS

Sabemos que para se obter caleidosciclos regulares (formados por tetraedros regulares), o número n de tetraedros tem que satisfazer $n \geq 8$, conforme é provado na análise matemática (ver no próximo capítulo). As FIG. 14 e 15 referem-se a um caleidosciclo de 8 tetraedros regulares. Na FIG. 15 temos uma seção transversal dele, na qual vemos metade das arestas de medida a na posição horizontal e a outra metade na vertical.

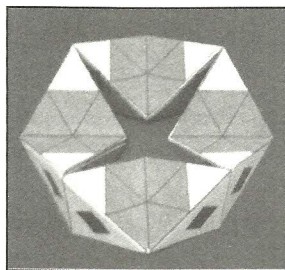


FIGURA 14

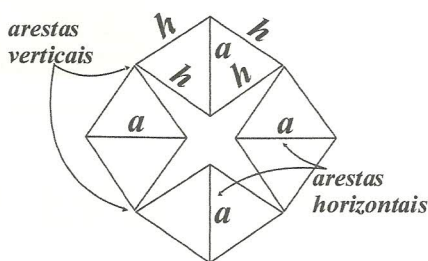


FIGURA 15

Como os triângulos são equiláteros, todas as arestas têm a mesma medida a . Sendo assim, basta determinar a altura h deles. Na seção transversal, a é aresta e h altura. Então, $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Construção: Desenhar (em cartolina) 42 triângulos equiláteros de lados a , $\left(h = \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, e proceder como no caso $n = 8$ para caleidosciclo isósceles. A FIG. 16 mostra a planificação utilizada para a montagem do caleidosciclo da FIG. 14. Com isso, queremos dizer que é possível colocar qualquer tipo de ornamento nas faces triangulares dos tetraedros. Lembramos que as faces em branco são as que receberão cola para a fixação do objeto, e, como se pode notar, podem se localizar nas extremidades superiores ou nas inferiores.

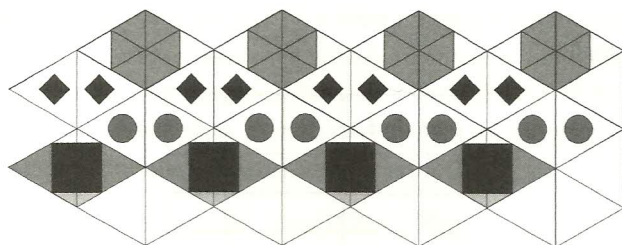


FIGURA 16

Atividade:

Construir a planificação de um caleidosciclo regular de 10 tetraedros.

C – CUBO INVERTIDO

Este caleidosciclo (FIG. 17) pode ser feito a partir de um triângulo equilátero de lado $a \geq 5\text{cm}$.

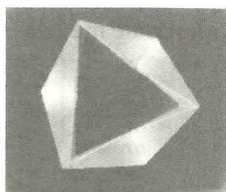


FIGURA 17

Construção:

- 1) Desenhar um triângulo equilátero de lado a e suas medianas, obtendo-se 6 triângulos retângulos.
- 2) Refletir um dos triângulos retângulos sobre o seu lado correspondente, junto ao triângulo equilátero.
- 3) Construir um retângulo a partir da hipotenusa do triângulo refletido.
- 4) Construir um triângulo retângulo congruente ao que foi refletido, usando um lado do retângulo, conforme FIG. 18.
- 5) De modo análogo, repetir os passos de (1) a (4) para os outros triângulos retângulos, contidos no triângulo equilátero, obtendo o **molde (a)**. Observe que também é possível fazer o **molde (b)**. É conveniente deixar “abas” nas extremidades dos triângulos (conforme FIG. 18 e FIG. 19), pois facilitam a montagem dos tetraedros.
- 6) Recortar e fazer os vincos necessários, seguindo as linhas da planificação, formando os tetraedros e fechando o círculo tridimensional.

7) Se necessário, utilizar fitas adesivas para dar maior rigidez ao objeto.

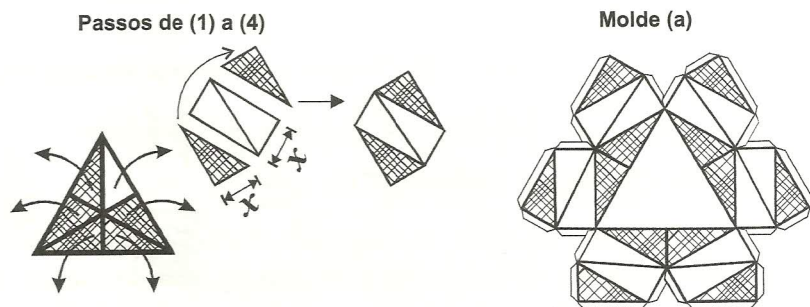


FIGURA 18

É possível chegar-se a outro molde (FIG. 19), a partir do passo (4), copiando conforme a figura abaixo.

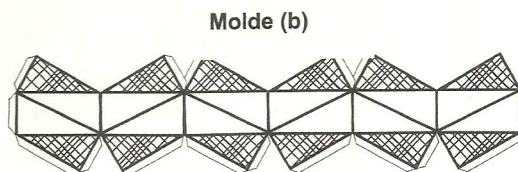


FIGURA 19

Situações interessantes que podem ser observadas em algumas posições do cubo invertido:

- Girando-se o caleidosciclo, haverá uma posição em que os ângulos retos dos triângulos são usados para formar cantos do cubo.
- Em outra, o visual é de seis triângulos em um mesmo plano, formando um hexágono oco na frente.
- Há, ainda, uma posição em que seis triângulos retângulos formam um triângulo equilátero.

Existem muitos outros tipos de caleidosciclos, porém, vamos mostrar apenas a construção de mais um modelo: o *meio octaedro*.

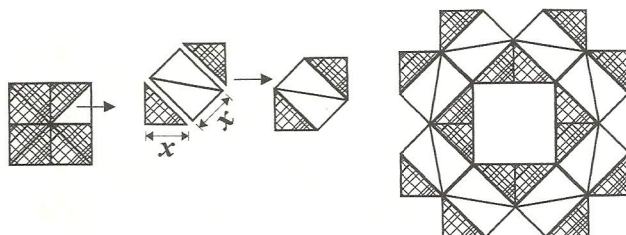


FIGURA 20

É fácil notar que a construção deste caleidosciclo segue os mesmos procedimentos do cubo invertido, e podem ser feitos, também, os moldes de planificação (a) e (b).

Atividade:

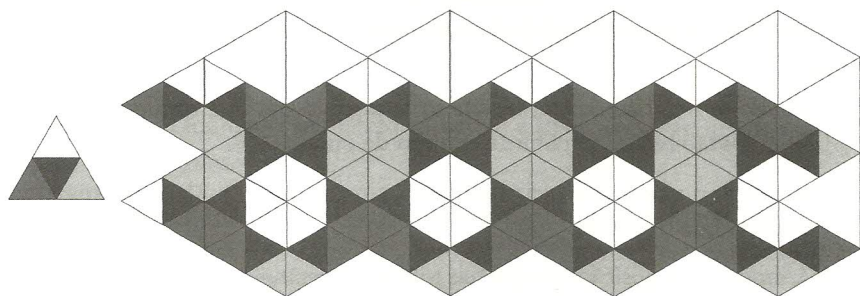
Construir o caleidosciclo da FIG. 20. Observar e descrever as situações encontradas nas diferentes rotações.

D – CALEIDOSCICLOS COM ORNAMENTOS

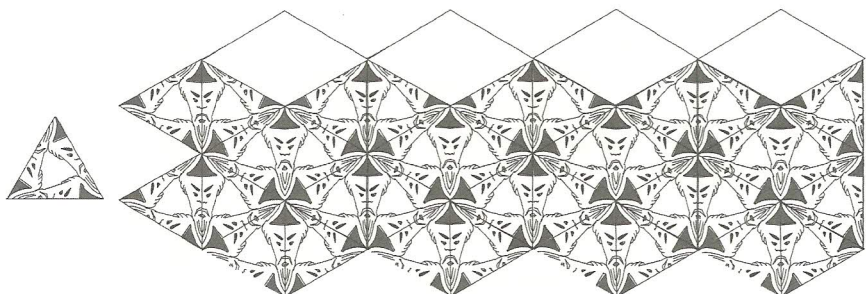
Os caleidosciclos, assim como os caleidoscópios, proporcionam uma interação entre matemática e arte, pois é possível inserir nas faces dos tetraedros alguns ornamentos. Schattschneider e Walker (1991) utilizaram muitos motivos de Escher em seus caleidosciclos. Podemos, também, utilizar bases caleidoscópicas (modificadas ou não) ou, ainda, qualquer tipo de padrão que produz figuras simétricas quando rotacionados os caleidosciclos.

A seguir, três exemplos de caleidosciclos regulares de oito tetraedros ornamentados, em que foram utilizadas bases caleidoscópicas da pavimentação de configuração $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$. No primeiro caso, temos uma base que fornece triângulos com quatro cores. Nos outros dois casos, a base é a que fornece triângulos de uma só cor; porém, em seu interior foram colocados ornamentos.

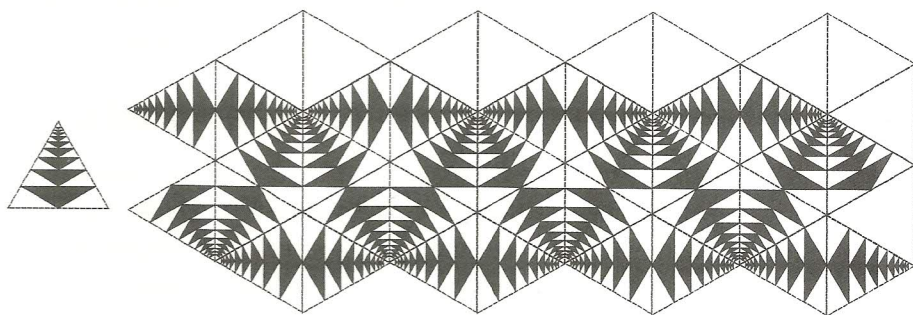
(a) Base da pavimentação $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$, que fornece triângulos com 4 cores.



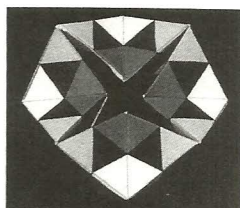
(b) Base Mandarim para caleidoscópio equilátero apresentada por Barbosa



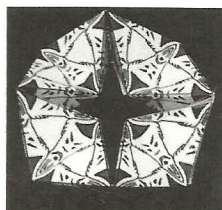
(b) Base Hexágonos inscritos para caleidoscópio equilátero apresentada por Murari (1999)



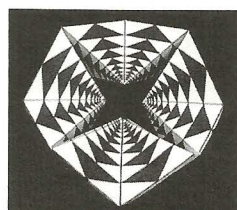
Abaixo, os caleidosciclos montados:



(a)



(b)



(c)



QUANTOS E QUAIS SÃO OS CALEIDOSCICLOS?

A – ANÁLISE MATEMÁTICA

Análise matemática: Que propriedades matemáticas precisam ter os tetraedros para que o círculo tridimensional possa ser continuamente rotacionado?

Definição: Duas arestas de tetraedros são ortogonais quando estes, colocados ponto final a ponto final, elas são perpendiculares (FIG. 21).



FIGURA 21

A.1. CALEIDOSCICLOS REGULARES

Constituído de tetraedros regulares, isto é, todas as faces são triângulos equiláteros iguais.

- i) dados A, B, C , e D vértices de um tetraedro regular e sejam E e F pontos médios das arestas $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$, respectivamente, e G o ponto médio de $\overline{EF}$ (FIG. 22). Por congruência dos triângulos BEF e EFC , temos $\overline{BC} \perp \overline{EF}$. Transladando a aresta $\overline{AD}$ perpendicularmente ao plano que contem as arestas $\overline{BC}$ e $\overline{EF}$, teremos $\overline{AD}$ perpendicular a $\overline{BC}$; disso, segue que $\overline{BC}$ é ortogonal a $\overline{AD}$.

Temos, também, que $h^2 = \left(\frac{i}{2}\right)^2 + m^2 = i^2 - \left(\frac{i}{2}\right)^2$ ou $i = m\sqrt{2}$, sendo i o lado dos triângulos e h a altura.

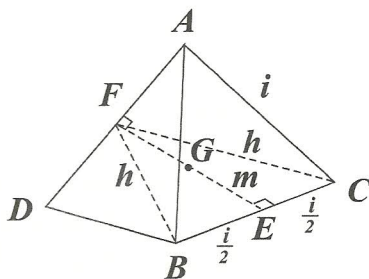


FIGURA 22

- ii) Consideremos $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 8$ e $\pi_{xz} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 0\}$ o plano- xz .
Seja $\theta = \frac{2\pi}{n}$, $\pi_\theta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = x \operatorname{tg} \theta\}$ e $\vec{n}_\theta = (-\operatorname{sen} \theta, \cos \theta, 0)$.

Temos que:

- 1) $\vec{n}_\theta \cdot \vec{a} = 0$ para $\vec{a} \in \pi_\theta$ (produto escalar de vetores)
- 2) $\pi_\theta \cap \pi_{xz} = \text{eixo } z$
- 3) De $\theta - \frac{2\pi}{n} \Rightarrow 0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$ quando $n \geq 8$.

Seja o tetraedro como na FIG. 23, onde temos:

- B, E, C, F e G pertencem ao plano- xy ;
- B, E e C pertencem ao plano π_{xz} e
- A, F, D pertencem ao plano π_θ .

Como $m = EF > 0$ e $0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$ tal tetraedro existe, e é único. Também temos

$$\overline{BE} = \frac{i}{2} = \frac{m\sqrt{2}}{2} < m \leq \frac{m}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{\overline{EF}}{\operatorname{tg} \theta} = \overline{OE}. \text{ Observe que de } 0 < \theta \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \operatorname{tg} \theta \leq 1.$$

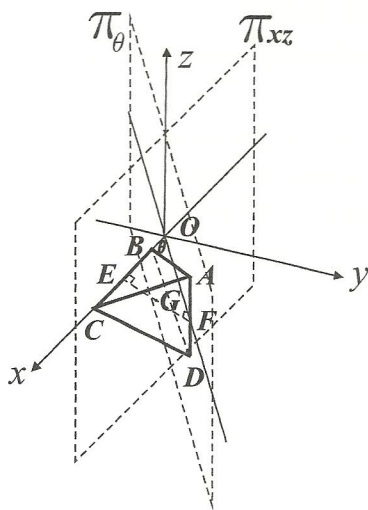


FIGURA 23

Se n é par e $n \geq 8$, então, refletindo o tetraedro em torno do plano π_θ , teremos outro tetraedro com aresta comum $\overline{AD}$ (FIG. 24). Rotacionando os dois tetraedros em torno do eixo z obtemos um círculo tridimensional de tetraedros regulares, pois n é par e $\theta = \frac{2\pi}{n}$.

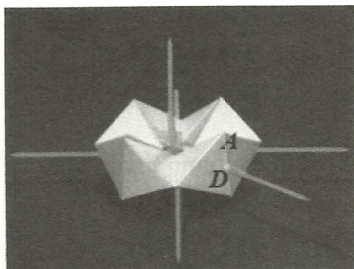


FIGURA 24

Exemplos: Se $n = 8 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$ caleidosciclo regular de 8 tetraedros.

Se $n = 10 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{5} \Rightarrow$ caleidosciclo regular de 10 tetraedros.

Seja agora o tetraedro $ABCD$ e $\lambda \in [0, 2\pi]$. Consideremos os vetores $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{DA}$. Queremos rodar o tetraedro onde λ representa o ângulo entre $\overrightarrow{BC}$ e o eixo x .

Sejam $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda, D_\lambda, E_\lambda, F_\lambda$, as posições dos pontos para o ângulo λ .

Observe na FIG. 24 que:

- i) O tetraedro roda dentro dos planos π_θ e π_{xz} , em torno de E e F .
- ii) Por simetria, o anel de tetraedros pode ser rodado.

Sejam os vetores

$$\vec{u} = \frac{B_\lambda C_\lambda}{\|B_\lambda C_\lambda\|} = \begin{pmatrix} \cos \lambda \\ 0 \\ \sin \lambda \end{pmatrix} \in \pi_{xz} \quad \text{e} \quad \vec{v} = \frac{\overrightarrow{D_\lambda A_\lambda}}{\|\overrightarrow{D_\lambda A_\lambda}\|} = \frac{\vec{u} \times \vec{n}_\theta}{\|\vec{u} \times \vec{n}_\theta\|} \quad (x = \text{produto vetorial})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda \cos^2 \theta}} \begin{pmatrix} -\sin \lambda \cos \theta \\ -\sin \lambda \sin \theta \\ \cos \lambda \cos \theta \end{pmatrix} \in \pi_\theta$$

$$\text{Seja } \vec{w} = -(\vec{u} \times \vec{v}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 \lambda \tan^2 \theta}} \begin{pmatrix} -\sin^2 \lambda \tan \theta \\ 1 \\ \cos \lambda \sin \lambda \tan \theta \end{pmatrix}, \text{ então } \|\vec{w}\| = 1.$$

Observe: temos também que, se $\vec{u}$ é versor de $B_\lambda C_\lambda$ e $\vec{v}$ versor de $\overrightarrow{D_\lambda A_\lambda}$, então $\vec{w} = -(\vec{u} \times \vec{v})$ é versor de $\overrightarrow{EF}$, pois $\overrightarrow{BC}$ é ortogonal a $\overrightarrow{DA}$ e $\{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{FE}\}$ é base do $\mathbb{R}^3$.

Assim, temos $m\vec{w} = \overrightarrow{E_\lambda F_\lambda} = F_\lambda - E_\lambda$ ou $m \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$. Se $E_\lambda \in \pi_{xz}$ e $F_\lambda \in \pi_\theta$, obtemos $f_2 = mw_2$, pois $e_2 = 0$

$$f_1 = m \frac{w_2}{tg\theta}, \text{ pois } f_2 = f_1 tg\theta, e_1 = f_1 - m w_1 = m \left(\frac{w_2}{tg\theta} - w_1 \right)$$

$$f_3 = -e, \frac{mw_3}{2} \quad (f_3 \text{ e } w_3 \text{ têm o mesmo sinal}). \text{ Disso resulta:}$$

$$E_\lambda = m \begin{pmatrix} \frac{w_2}{tg\theta} - w_1 \\ 0 \\ -\frac{w_3}{2} \end{pmatrix} \in \pi_{xz}, \quad F_\lambda = m \begin{pmatrix} \frac{w_2}{tg\theta} \\ w_2 \\ \frac{w_3}{2} \end{pmatrix} \in \pi_\theta \text{ e } B_\lambda, C_\lambda, D_\lambda, A_\lambda$$

$$\text{são dados por } B_\lambda = E_\lambda - \frac{m}{2} \sqrt{2} \vec{u} \quad C_\lambda = E_\lambda + \frac{m\sqrt{2}}{2} \vec{u} \quad D_\lambda = F_\lambda - \frac{m\sqrt{2}}{2} \vec{v} \\ A_\lambda = F_\lambda + \frac{m\sqrt{2}}{2} \vec{v}$$

Considerar um caleidosciclo de n tetraedros (n par) em $\lambda = 0^\circ$ (FIG. 25).

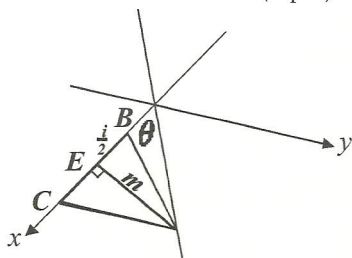


FIGURA 25

Seja e_1 a coordenada de E no eixo x $e_1 \geq \frac{i}{2} = \frac{m\sqrt{2}}{2}$, pois, caso contrário, vários tetraedros podem interceptar-se na origem.

$$\text{De } e_1 = \frac{m}{tg\theta} \text{ e } \theta = \frac{2\pi}{n}, \text{ obtemos } tg \frac{2\pi}{n} \leq \sqrt{2},$$

$$\left(\frac{m\sqrt{2}}{2} \leq e_1 = \frac{m}{tg \frac{2\pi}{n}} \Rightarrow tg \frac{2\pi}{n} \leq \frac{2m}{m\sqrt{2}} = \sqrt{2} \right).$$

Assim, $tg \frac{2\pi}{n} \leq \sqrt{2}$, cuja solução para n par é $n \geq 8$.

$$\text{Se } n = 6 \Rightarrow tg \frac{2\pi}{6} = tg \frac{\pi}{3} = \left(sen \frac{\pi}{3} \right) : \left(cos \frac{\pi}{3} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) : \left(\frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} > \sqrt{2} \quad . \text{ Disso,}$$

conclui-se que um caleidosciclo regular de seis tetraedros não pode ser levado para a posição $\lambda = 0^\circ$. Portanto, não pode ser rodado de 360° , a menos que possamos esticar os triângulos equiláteros, tornando-os isósceles.

A.2. CASO GERAL

Para um tetraedro regular $ABCD$ (FIG. 26), as posições de seus vértices são obtidas dos pontos E e F e dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, de tal maneira que:

$$B = E - \frac{m\sqrt{2}}{2} \vec{u}$$

$$C = F + \frac{m\sqrt{2}}{2} \vec{u} \quad D = F - \frac{m\sqrt{2}}{2} \vec{v} \quad A = F + \frac{m\sqrt{2}}{2} \vec{v}$$

para o escalar $\frac{m\sqrt{2}}{2}$.

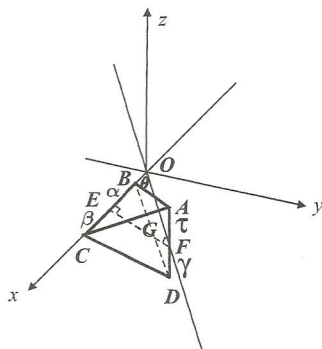


FIGURA 26

Se tomarmos $B = E - \alpha \vec{u}$, $C = E + \beta \vec{u}$, $D = E - \gamma \vec{v}$ e $A = F + \tau \vec{v}$, onde α , β , γ e τ são escalares arbitrários e $|\alpha|, |\beta|, |\gamma|, |\tau| \leq \frac{m}{\text{tg}\theta}$, obtemos círculos tridimensionais de tetraedros que podem ser ou não regulares.

B – ANÁLISE DOS TIPOS DE TETRAEDROS

I) Para $\alpha = \beta$, $\gamma = \tau$, obtemos caleidosciclos isósceles (todas as faces são triângulos isósceles).

Se $n \geq 8$ e $\alpha = \beta = \gamma = \tau = \frac{m\sqrt{2}}{2}$, temos caleidosciclos regulares (as faces são triângulos equiláteros).

Se $n = 6$, obtemos um caleidosciclo irregular (triângulos isósceles).

II) Se $\alpha = \beta = \gamma = \tau = \frac{m}{\text{tg}\theta}$, então, para $\lambda = 0^\circ, \frac{\pi}{2}, \pi$ e $\frac{3\pi}{2}$, os vértices dos tetraedros encontram-se na origem O . Assim, temos caleidosciclos fechados.

III) Para $\beta = \tau = 0$, temos que as faces dos tetraedros são triângulos retângulos.

($C = E + 0\vec{u}$, $A = F + 0\vec{v}$); nesse caso, os caleidosciclos serão retos.

IV) Caso especial: Cubo invertido: $n = 6$, $\alpha = \gamma = \frac{m}{\text{tg}\theta}$, $\beta = \tau = 0$. Para $\theta = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$

esse caleidosciclo torna-se um cubo se prolongarmos as arestas $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ e as arestas correspondentes do outro tetraedro. Mais detalhes da análise dos tipos de tetraedros podem ser encontrados ENGEL (2003).

Finalmente, com a base teórica mencionada, e utilizada em várias referências bibliográficas, podem-se construir diversos tipos de caleidosciclos. Há que se ressaltar que, por possuírem muitas faces, ensinam a possibilidade de se utilizar ornamentos nas mesmas. Também, por sua especificidade de permitir movimentos rotacionais que permitem a repetição de padrões, remetem-nos à sua profunda analogia com os caleidoscópios, pois ambos possibilitam a reprodução de padrões simétricos.

SEGUNDA PARTE

Capítulo 1

ENGEL, M. M. C. *Escher Kaleidocycles*. May 7, 2003. Disponível em: <http://www.ac-noumea.nc/math/polyhedr/stuff/kaleidocycles_theory.pdf>. Acesso em: 15 mar. 2008.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. *Revista de Educação Matemática*, São Paulo, v. 9, n. 9-10, p. 1-6, 2004/2005.

PAIS, L. *Intuição, Experiência e Teoria Geométrica*. Campinas: Zetetiké, 1996.

SCHATTSCHNEIDER, D.; WALKER, W. *Caleidosciclos de M. C. Escher*. Tradução de Maria Odete Gonçalves-Koller. Köln: Taschen: 1991.

SCHREINER, I. V. Caleidosciclos. Adaptado por Luís Márcio Imenes. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 8, 1986.

<<http://www.mathematische-basteleien.de/kaleidocycles.htm>>. Acesso em: 15 mar. 2008.

<<http://www.korthalsaltes.com>>. Acesso em: 15 mar. 2008.